Indice

Introduzione

Questa tesi è dedicata alla teoria dell'integrazione in una variabile ed al confronto tra le definizioni di integrale disponibili sul mercato. In particolare, vogliamo trattare in qualche dettaglio la teoria degli integrali di Riemann e di Lebesgue, per poi confrontare le due definizioni per capire quali sono i rispettivi meriti e le rispettive limitazioni.

Il primo capitolo è dedicato all'integrale di Riemann: in questo caso la definizione è particolarmente semplice e naturale, e l'idea di base assomiglia molto a quella usata dalla matematica greca per calcolare l'area del cerchio o del segmento parabolico. Così come Archimede approssimava il cerchio, da dentro e da fuori, con poligoni regolari, Riemann approssima il sottografico di una funzione, da dentro e da fuori, con unioni di un numero finito di rettangoli. In questo contesto, introduciamo anche una semplice generalizzazione dell'integrale di Riemann: l'integrale di Riemann-Stieltjes. In questo caso, la misura elementare di un intervallo dell'asse delle ascisse è sostituita da una diversa misura, costruita a partire da una data funzione monotona: alcune possibili interpretazioni fisiche di questa generalizzazione sono date nell'Osservazione 1.18.

Dopo le principali definizioni e qualche proprietà elementare dell'integrale di Riemann, cerchiamo di trovare qualche classe di funzioni integrabili e ci occupiamo in particolare dell'integrabilità delle funzioni continue e del teorema fondamentale del calcolo.

Il secondo capitolo è dedicato alla misura ed all'integrale di Lebesgue: dopo una costruzione dettagliata della misura di Lebesgue, diamo la definizione di funzione misurabile ed introduciamo l'integrale ed i principali teoremi di passaggio al limite. Sottolineamo come, al prezzo di definizioni assai più complicate, abbiamo guadagnato però una maggiore flessibilità nei passaggi al limite. In particolare, il limite di una successione di funzioni misurabili è sempre misurabile, mentre una successione di funzioni integrabili secondo Riemann può convergere a qualcosa che non lo è.

Nel terzo capitolo facciamo un confronto tra l'integrale di Riemann e di Lebesgue: mostriamo come una funzione limitata, definita su un intervallo limitato ed integrabile secondo Riemann, lo sia anche secondo Lebesgue con lo stesso integrale. Dimostriamo anche il teorema di Vitali che caratterizza le funzioni integrabili secondo Riemann: una condizione necessaria e sufficiente è infatti la continuità quasi ovunque della funzione (l'insieme dei punti di discontinuità deve avere cioè misura di Lebesgue nulla). Mostriamo poi come le cose non siano più così semplici e pulite quando andiamo a considerare integrali di Riemann in senso improprio: una funzione di segno qualunque che sia integrabile in senso improprio (secondo Riemann), può non essere integrabile secondo Lebesgue perché gli integrali della parte positiva e della parte negativa sono entrambi infiniti.

Nel quarto capitolo trattiamo qualche definizione alternativa dell'integrale di Riemann, che può essere interessante storicamente e perché la si trova spesso sui testi scolastici: ci riferiamo in particolare all'integrale di Cauchy, ed alle somme di Riemann con suddivisioni dell'intervallo di integrazione in parti uguali. Mostriamo come, sotto precise ipotesi, queste definizioni conducano tutte allo stesso oggetto.

Infine, nel quinto capitolo diamo qualche brevissimo cenno storico.

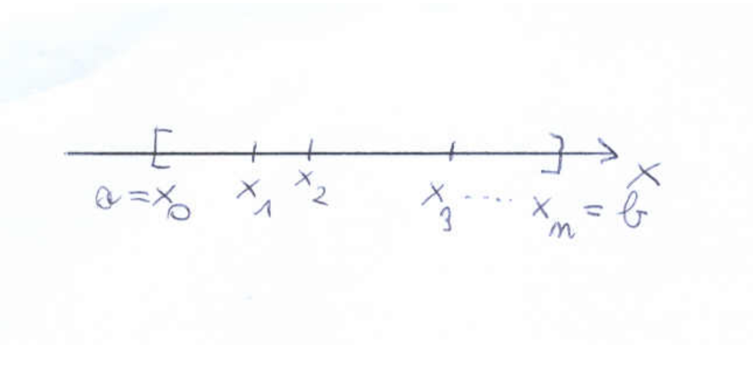
Capitolo 1

Definizione ed esistenza dell'integrale di Riemann

1.1 Definizione: Sia $[a, b]$ un intervallo. Sia P un insieme finito di punti dell'asse reale, compresi tra a e b, e ordinati nel modo seguente:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

dove $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.



Questo insieme P si chiama **partizione** di $[a, b]$ in quanto divide l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli l'i-esimo dei quali è $[x_{i-1}, x_i]$. Questi sottointervalli sono chiamati sottointervalli della partizione P. Il numero n dipende dalla particolare partizione, per cui si scrive $n = n(P)$.

La lunghezza dell'i-esimo sottintervallo di P è

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \ (i = 1, ..., n).$$

A volte la lunghezza del più grande di questi intervalli, Δx_i, viene chiamata **norma** della partizione P, e indicata con $|| P ||= \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$

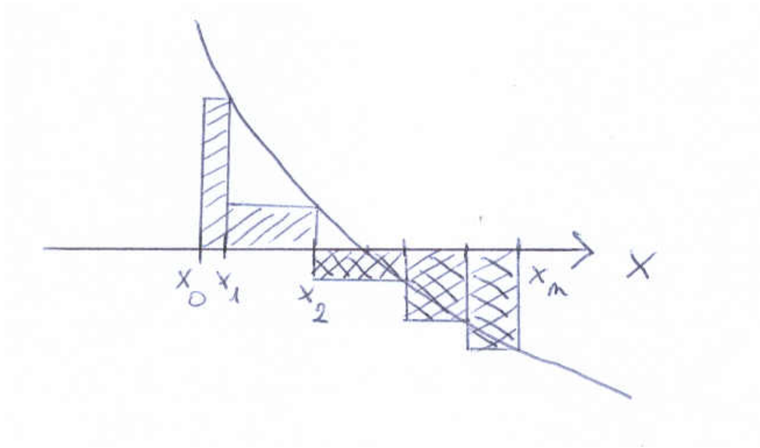
Ora supponiamo f sia una funzione limitata reale definita su $[a, b]$.
In corrispondenza ad ogni partizione P di $[a, b]$ poniamo:

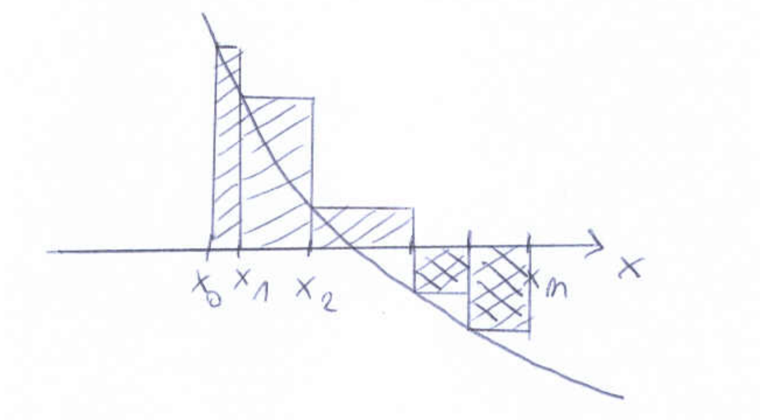
$$M_i = \sup f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$
$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

$$U(P, f) = \sum M_i \Delta x_i$$
$$L(P, f) = \sum m_i \Delta x_i$$

dove $L(P, f)$ è la somma inferiore e $U(P, f)$ è la somma superiore di Riemann relative alla funzione f e alla partizione P.

Le seguenti figure fanno vedere queste somme di Riemann come somme di aree di rettangoli dotati di segno; cioè ogni area che si trova sotto l'asse x viene contata come negativa.





Scriviamo:

$$(1) \overline{\int_a^b} f\ dx = \inf\ U(P, f)$$

$$(2) \underline{\int_a^b} f\ dx = \sup\ L(P, f)$$

dove l'inf e il sup sono presi tra tutte le partizioni P di $[a, b]$. I membri di sinistra di (1) e (2) sono chiamati rispettivamente gli integrali di Riemann superiore e inferiore su $[a, b]$.

Se i due integrali sono uguali, si dice che f è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a, b]$ e si scrive che $f \in \mathcal{R}$.

L'insieme $\mathcal{R}$ è l'insieme di tutte le funzioni integrabili secondo Riemann.

Il valore comune di (1) e (2) si indica con

$$\int_a^b f\ dx$$

o con

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

Questo è l'**integrale di Riemann** della funzione f sull'intervallo $[a, b]$.

Visto che la funzione f è limitata, esistono due numeri, M e m, tali che

$$m \leq f(x) \leq M \qquad (a \leq x \leq b)$$

Quindi, per ogni P vale,

$$m(b - a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b - a)$$

I numeri $L(P, f)$ e $U(P, f)$ formano un insieme limitato.

Ciò dimostra che gli integrali superiore e inferiore sono definiti per ogni funzione limitata f.

Ora invece di studiare la questione dell'integrabilità per l'integrale di Riemann, consideriamo una situazione più generale: definiamo l'integrale di Riemann-Stieltjes.

1.2 Definizione:

Sia α una funzione monotona crescente su $[a, b]$ (Poiché $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ sono finite, segue che α è limitata su $[a, b]$).

In corrispondenza a ogni partizione P di $[a, b]$, scriviamo

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

Per ogni funzione reale f limitata su $[a, b]$ mettiamo:

$$(3)\ U(P, f, \alpha) = \sum M_i \Delta\alpha_i$$

$$(4)\ L(P, f, \alpha) = \sum m_i \Delta\alpha_i$$

Si definisce:

$$(5)\ \overline{\int_a^b} f\ d\alpha = \inf\ U(P, f, \alpha)$$

$$(6)\ \underline{\int_a^b} f\ d\alpha = \sup\ L(P, f, \alpha)$$

dove l'inf e il sup sono presi ancora tra tutte le partizioni dell'intervallo $[a, b]$.

Se i membri sinistri di (5) e (6) sono uguali, chiamiamo il loro valore uguale

$$(7)\ \int_a^b f\ d\alpha$$

oppure con

$$(8)\ \int_a^b f(x)\ d\alpha(x)$$

Questo è chiamato l'integrale di Riemann-Stieltjes della funzione f rispetto ad α, sull'intervallo $[a, b]$.

Se (7) esiste, cioè se (5) e (6) sono uguali, si dice che f è integrabile rispetto ad α secondo Riemann e si scrive $f \in R(\alpha)$.

L'integrale di Riemann si può vedere come un caso speciale dell'integrale di Riemann-Stieltjes ponendo $\alpha(x) = x$.

Nel caso generale, non è però necessario che α sia continua.

Facciamo ora qualche osservazione sulle notazioni usate. Di solito si preferisce usare (7) rispetto ad (8) poiché la lettera x che appare in (8) non aggiunge nulla a (7). E' indifferente la lettera che usiamo per rappresentare la variabile d'integrazione. Si può scrivere per esempio:

$$\int_a^b f(y)\ d\alpha(y)$$

L'integrale dipende da f, α, a e b; non dalla variabile d'integrazione, che può quindi anche essere omessa. Il ruolo giocato dalla variabile d'integrazione è abbastanza simile all'indice usato in una sommatoria.

Scrivere per esempio

$$\sum_{i=1}^{n} c_i$$

o

$$\sum_{k=1}^{n} c_k$$

è la stessa cosa, poiché ognuno significa $c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n$.

Studiamo ora l'esistenza dell'integrale. Senza specificarlo ogni volta, f sarà reale e limitata, e α monotona crescente sull'intervallo $[a, b]$; e, se non ci saranno fraintendimenti scriviamo $\int$ al posto di $\int_a^b$ per snellire la lettura.

1.3 Definizione:

Si dice che la partizione P^* è un raffinamento di P se $P^* \supset P$. Cioè se ogni punto di P è punto anche di P^*. Siano P_1 e P_2 due partizioni. Allora P^* è il loro raffinamento comune se $P^* = P_1 \cup P_2$.

1.4 Teorema:

Se P^* è un raffinamento di P, allora vale

$$(9)\ L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha)$$

e

$$(10)\ U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

Dimostrazione:

Per dimostrare (9), supponiamo inizialmente che P^* contenga solo un punto in più rispetto a P. Chiamiamo questo punto in più x^*, e supponiamo che $x_{i-1} < x^* < x_i$ con x_{i-1} e x_i due punti consecutivi di P.

Sia:

$$w_1 = \inf\ f(x) \qquad (x_{i-1} \leq x \leq x^*)$$

$$w_2 = \inf\ f(x) \qquad (x^* \leq x \leq x_i)$$

Chiaramente $w_1 \geq m_i$ e $w_2 \geq m_i$, dove

$$m_i = \inf\ f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x_i)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
&L(P^*, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \\
&= w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \\
&= (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \ge 0
\end{aligned}$$

Se P^* contiene k punti più di P, ripetiamo questo ragionamento k volte, e si arriva a (9).

In modo analogo è possibile dimostrare (10).

1.5 Teorema:

$$\underline{\int_a^b} f\ d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\ d\alpha$$

Dimostrazione:

Sia P^* il raffinamento comune di due partizioni P_1 e P_2. Per il teorema 1.4 vale,

$$L(P_1, f, \alpha) \le L(P^*, f, \alpha) \le U(P^*, f, \alpha) \le U(P_2, f, \alpha)$$

Segue che

$$(11)\ L(P_1, f, \alpha) \le U(P_2, f, \alpha)$$

Se P_2 è fissato e il sup è preso su tutto P_1, (11) dà:

$$(12)\ \underline{\int} f\ d\alpha \le U(P_2, f, \alpha)$$

Il teorema segue prendendo l'inf su tutto P_2 in (12).

1.6 Teorema:

$f \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, b]$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partizione tale che,

$$(13)\ U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

Dimostrazione:
$\forall P$ abbiamo

$$L(P,f,\alpha) \leq \underline{\int} f\,d\alpha \leq \overline{\int} f\,d\alpha \leq U(P,f,\alpha)$$

Così (13) implica:

$$0 \leq \underline{\int} f\,d\alpha - \overline{\int} f\,d\alpha \leq \varepsilon$$

Quindi, se (13) può essere soddisfatta $\forall\ \varepsilon > 0$, si ha,

$$\underline{\int} f\,d\alpha = \overline{\int} f\,d\alpha$$

cioè, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.
Viceversa, supponiamo $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, e sia $\varepsilon > 0$.
Allora $\exists P_1, P_2$ partizioni tali che

$$(14)\ U(P_2,f,\alpha) - \int f\,d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(15)\ \int f\,d\alpha - L(P_1,f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Scegliamo P come raffinamento comune di P_1 e P_2.
Allora per il teorema 1.4, con (14) e (15), si verifica che

$$U(P,f,\alpha) \leq U(P_2,f,\alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1,f,\alpha) + \varepsilon \leq L(P,f,\alpha) + \varepsilon$$

cioè (13) vale per questa partizione P.
Il teorema 1.6 fornisce un criterio utile per stabilire l'integrabilità. Prima di applicarlo, alcuni fatti utili:

1.7 Teorema:
(a) Se (13) vale per qualche P e per qualche ε, allora (13) vale (con lo stesso ε) per ogni raffinamento di P.
(b) Se (13) vale per $P = \{x_0, ..., x_n\}$ e se s_i, t_i sono punti arbitrari in $[x_{i-1}, x_i]$, allora

$$\sum_{i=1}^{n} \mid f(s_i) - f(t_i) \mid \Delta\alpha_i < \varepsilon$$

(c) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ e vale (b) allora

$$\mid \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f \, d\alpha \mid < \varepsilon$$

Dimostrazione:
Il teorema 1.4 implica (a). Sotto l'ipotesi fatta in (b), sia $f(s_i)$ che $f(t_i)$ stanno in $[m_i, M_i]$, cioè:

$$\mid f(s_i) - f(t_i) \mid \leq M_i - m_i$$

Così

$$\sum_{i=1}^{n} \mid f(s_i) - f(t_i) \mid \Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

che prova (b).
Le ovvie diseguaglianze seguenti dimostrano (c):

$$L(P, f, \alpha) \leq \sum f(t_i)\Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha)$$

e

$$L(P, f, \alpha) \leq \int f \, d\alpha \leq U(P, f, \alpha)$$

1.8 Teorema:
Se f è continua su $[a, b]$ allora $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, b]$.

Dimostrazione:
Sia $\varepsilon > 0$. Scelgo $\eta > 0$ tale che

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon$$

Siccome f è continua su un intervallo chiuso e limitato, ne segue che f è uniformemente continua su $[a, b]$, e allora $\exists \delta > 0$ tale che

$$(16) \quad \mid f(x) - f(t) \mid < \eta$$

se $x \in [a, b]$, $t \in [a, b]$ e $\mid x - t \mid < \delta$.
Se P è una partizione di $[a, b]$ tale che $\Delta x_i < \delta \quad \forall i$, allora (16) implica che

$$(17) \ M_i - m_i \leq \eta \quad (i - 1, ..., n)$$

e quindi

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i \leq \eta\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i=\eta[\alpha(b)-\alpha(a)]<\varepsilon$$

Per il teorema 1.6, $f\in\mathcal{R}(\alpha)$.

1.9 Teorema:
Se f è monotona su $[a,b]$, e se α è continua su $[a,b]$, allora $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ (Supponiamo sempre che α sia monotona).

Dimostrazione:
Sia $\varepsilon>0$. $\forall n>0$, $n\in\mathcal{Z}$, scelgo una partizione tale che:

$$\Delta\alpha_i=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\quad (i=1,...,n)$$

Questo è possibile poiché α è continua.
Supponiamo che sia monotona crescente. Allora:

$$M_i=f(x_i),\ m_i=f(x_{i-1})\quad (i=1,...,n)$$

cioè

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}[f(b)-f(a)]<\varepsilon$$

se n è preso abbastanza grande.
Per il teorema 1.6, $f\in\mathcal{R}(\alpha)$.

1.10 Teorema:
Supponiamo che f sia limitata su $[a,b]$, e che f abbia solo alcuni punti di discontinuità, in numero finito, sull'intervallo $[a,b]$, e α sia continua in ogni punto in cui f è discontinua. Allora $f\in\mathcal{R}(\alpha)$.

Dimostrazione:
Sia $\varepsilon>0$. Mettiamo $M=\sup\mid f(x)\mid$, sia E l'insieme dei punti in cui f è discontinua. Allora se E è finito e α è continua in ogni punto di E, possiamo coprire E con alcuni intervalli disgiunti $[u_j,v_j]\subset[a,b]$ tali che la somma delle corrispondenti differenze $\alpha(v_j)-\alpha(u_j)$ è minore di ε. Ancora, possiamo disporre questi intervalli in modo che ogni punto di $E\cap[a,b]$ vive all'interno di qualche $[u_j,v_j]$. Rimuoviamo i segmenti $[u_j,v_j]$ da $[a,b]$. Il

rimanente insieme K è compatto. Quindi f è uniformemente continua su K, e quindi $\exists\delta > 0$ tale che $| f(s) - f(t) |< \varepsilon$ se $s \in K$, $t \in K$, $| s - t |< \delta$. Ora forma una partizione $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ di $[a, b]$. Segue che ogni u_j cade in P.

Se x_{i-1} non appartiene a u_j, allora $\Delta x_i < \delta$.

Notare che $M_i - m_i \leq \varepsilon$ a meno che x_{x-1} appartenga a u_j. Quindi, come nella dimostrazione del teorema 1.11,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)] + \varepsilon + 2M\varepsilon$$

da qui ε è arbitraria. Il teorema 1.6 mostra che $f \in \mathcal{R}(\alpha)$

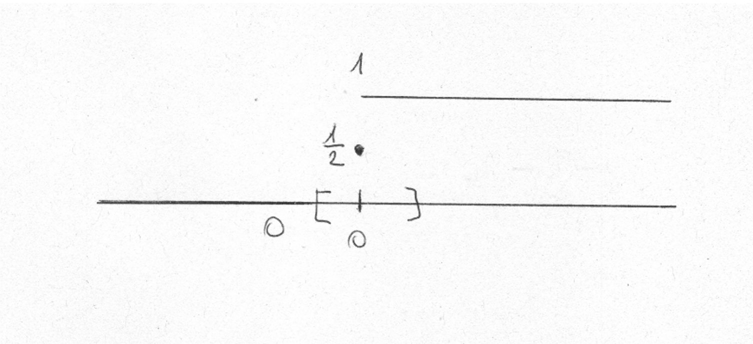
Se f e α hanno un punto di discontinuità in comune, allora f non necessariamente appartiene a $\mathcal{R}(\alpha)$; come mostra la seguente

Osservazione:

Sia β una funzione definita come segue, $\beta(x) = 0$ se $x < 0$, $\beta(x) = 1$ se $x > 0$ e $\beta(0) = \frac{1}{2}$. Sia f una funzione limitata su $[-1, 1]$.

Allora $f \in \mathcal{R}(\beta)$ se e solo se f è continua in 0.

Dimostrazione:



Supponiamo che non si abbia $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Allora $\exists\varepsilon_0 > 0$, $\exists y_n \to 0$ tale che $| f(y_n) - f(0) |> \varepsilon_0$.

Sia $\{y_{n_k}\}$ una sottosuccessione tale che $y_{n_k} \geq 0 \quad \forall k$ (oppure $y_{n_k} < 0 \forall k$.

Sia $P = \{x_0 = -1 < x_2 < x_3 < ... < x_N = 1\}$ una partizione.

Se 0 non è un un punto di suddivisione, $\exists \imath^*$ tale che:

$$x_{i^*} < 0 < x_{i^*+1}.$$

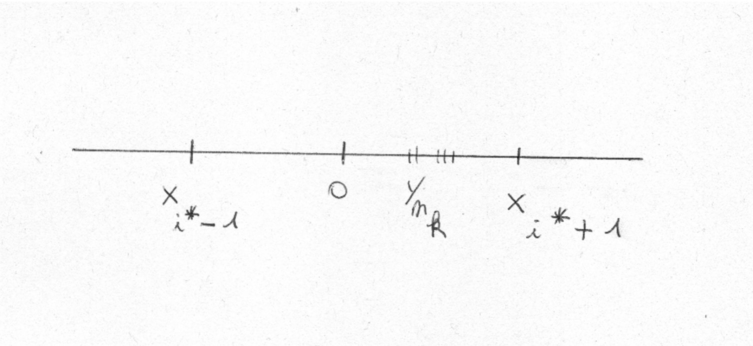
Allora:

$$M_{i^*} - m_{i^*} \geq | f(y_n) - f(0) | \varepsilon > 0$$

con $f(y_n) \in [x_{i^*}, x_{i^*+1}]$ e $f(0) \in [x_{i^*}, x_{i^*+1}]$ per n abbastanza grande segue che:

$$U(P, f, \beta) - L(P, f, \beta) > \varepsilon_0$$

Viceversa, supponiamo che $x_{i^*} = 0$.



Supponiamo per fissare le idee che $y_{n_k} > 0$

$$M_{i^*} - m_{i^*} \geq \mid f(y_{nk}) - f(0) \mid > \varepsilon_0$$

per k abbastanza grande segue che:

$$U(P, f, \beta) - L(P, f, \beta) > \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

quindi $f \notin \mathcal{R}(\beta)$.

1.11 Teorema:

Supponiamo che $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, b]$, $m \leq f \leq M$, ϕ è continua su $[n, M]$, e $h(x) = \phi(f(x))$ su $[a, b]$. Allora $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, b]$.

Dimostrazione:

Scegliamo $\varepsilon > 0$. Da qui ϕ è uniformemente continua su $[m, M]$, dove esiste $\delta > 0$ tale che $\delta < \varepsilon$ e $\mid \phi(s) - \phi(t) \mid < \varepsilon$ se $\mid s - t \mid \leq \delta$ e $s, t \in [n, M]$.

Quindi $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, c'è una partizione $P = \{x_o, x_1, ..., x_n\}$ di $[a, b]$ tale che

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \delta^2$$

Abbiamo M_i, m_i che hanno lo stesso significato della definizione 1.1 e siano M_i^*, m_i^* gli analoghi numeri per h.

Divido i numeri $1, ..., n$ in due classi:

$i \in A$ se $M_i - m_i < \delta$, $i \in B$ se $M_i - m_i \geq \delta$.

Per $i \in A$, la nostra scelta di δ mostra che $M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon$ Per $i \in B$, $M_i^* - m_i^* \leq 2K$, dove $K = \sup \mid \phi(t) \mid \quad m \leq t \leq M$.

Con (18), abbiamo

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i < \delta^2$$

cioè $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$.

Ne segue che

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i \leq$$
$$\leq \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\Delta < \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K]$$

Siccome ε è arbitrario, il teorema 1.6 implica che $h \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Proprietà degli integrali

1.12 Teorema:
(a) Se $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ e $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, b]$, allora

$$f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$$

$cf \in \mathcal{R}(\alpha)$, $\forall c$ costante, e

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1\, d\alpha + \int_a^b f_2\, d\alpha$$

$$\int_a^b cf\, d\alpha = c \int_a^b f\, d\alpha$$

(b) Se $f_1(x) \leq f_2(x)$ su $[a, b]$, allora

$$\int_a^b f_1(x)\, d\alpha \leq \int_a^b f_2(x)\, d\alpha$$

(c) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, b]$ e se $a < c < b$, allora $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, c]$ e su $[c, b]$, e

$$\int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha$$

(d) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, b]$ e se $\mid f(x) \mid \leq M$ su $[a, b]$, allora

$$\mid \int_a^b f \; d\alpha \mid \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

(e) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ e $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$, allora $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ e

$$\int_a^b f \; d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f \; d\alpha_1 + \int_a^b f \; d\alpha_2$$

se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ e c è una costante positiva, allora $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ e
$\int_a^b f \; d(c\alpha) = c \int_a^b f \; d\alpha$.

Dimostrazione:
Se $f = f_1 + f_2$ e P è una partizione di $[a, b]$, allora abbiamo:

(20) $L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha)$

Se $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ e $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$, sia $\varepsilon > 0$. C'è allora una partizione $P_j \qquad (j = 1, 2)$ tale che

$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \varepsilon$$

Questa disequazione vale anche se P_1 e P_2 sono sostituiti da un loro comune raffinamento P.
Allora (20) implica:

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < 2\varepsilon$$

che prova che $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Con lo stesso P abbiamo:

$$U(P, f_j, \alpha) < \int f_j \quad d\alpha + \varepsilon \quad (j = 1, 2)$$

quindi (20) implica:

$$\int f \; d\alpha \leq U(P, f, \alpha) < \int f_1 \; d\alpha + \int f_2 \; d\alpha + 2\varepsilon$$

.

Prendendo ε arbitrario, si conclude che:

$$(21) \int f \; d\alpha \leq \int f_1 \; d\alpha + \int f_2 \; d\alpha$$

.

Sostituendo f_1 e f_2 con $-f_1$ e $-f_2$, la disequazione è invertita.

Le dimostrazioni delle altre affermazioni del teorema 1.15 sono molto simili.

1.13 Teorema:
Se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ e $g \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, b]$, allora
(a) $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$
(b) $\mid f \mid \in \mathcal{R}(\alpha)$ e $\mid \int_a^b f \quad d\alpha \mid \leq \int_a^b \mid f \mid \quad d\alpha$.

Dimostrazione:
Se prendiamo $\phi(t) = t^2$, il teorema 1.11 mostra che $f^2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. L'identità $4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$ completa la dimostrazione di (a). Se prendiamo $\phi(t) =\mid t \mid$, il teorema 1.11 fa vedere in modo simile che $\mid f \mid \in \mathcal{R}(\alpha)$.
Scegliamo $c = \pm 1$, così che
$c \int f \ d\alpha \geq 0$
Allora $\mid \int f \ d\alpha \mid = c \int f \ d\alpha = \int cf \ d\alpha \leq \int \mid f \mid \ d\alpha$
poichè
$cf \leq \mid f \mid$.

1.14 Definizione:
La funzione a scalino unitaria I è definita come:

$$I(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

1.15 Teorema:
Se $a < s < b$, f è limitata su $[a, b]$, f è continua in s, e $\alpha(x) = I(x - s)$, allora

$$\int_a^b f \ d\alpha = f(s)$$

Dimostrazione:
Consideriamo le partizioni $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, dove $x_0 = a$, e $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Allora, $U(P, f, \alpha) = M_2 \quad L(P, f, \alpha) = m_2$.
Poiché f è continua in s, vediamo che M_2 e m_2 convergono a $f(s)$ quando $x_2 \to s$.

1.16 Teorema:
Supponiamo che $c_n \geq 0$ per $n = 1, 2, 3, ...$ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converga e che s_n sia una successione di punti distinti di (a, b), e

$$(22)\ \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$$

Sia f continua in $[a, b]$. Allora

$$(23)\quad \int_a^b f\ d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n)$$

Dimostrazione:

Il metodo del confronto mostra che la serie (22) converge $\forall x$. La sua somma $\alpha(x)$ è evidentemente monotona, e $\alpha(a) = 0$, $\alpha(b) = \sum c_n$.

Sia $\varepsilon > 0$, e scegliamo N così che:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$$

Mettiamo:

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x - s_n)$$

$$\alpha_2(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$$

Con i teoremi 1.12 e 1.15,

$$(24)\quad \int_a^b f\ d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n)$$

Poiché $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$,

$$(25)\quad \mid \int_a^b f\ d\alpha_2 \mid \leq M\varepsilon$$

dove $M = \sup \mid f(x) \mid$. Poiché $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, ne segue da (24) e (25) che

$$(26)\quad \mid \int_a^b f\ d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n) \mid \leq M\varepsilon$$

Se $N \to \infty$, otteniamo (23).

1.17 Teorema:
Supponiamo sia α una funzione monotona crescente e $\alpha' \in \mathcal{R}$ su $[a, b]$. Sia f una funzione reale limitata su $[a, b]$. Allora $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ se e solo se $f\alpha' \in \mathcal{R}$. In tal caso:

$$(27) \int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f(x) \, \alpha'(x) dx$$

Dimostrazione:
Sia $\varepsilon > 0$, applichiamo il teorema 1.6 a α'. C'è una partizione $P = \{x_0, ..., x_n\}$ di $[a, b]$ tale che

$$(28) \; U(P, \alpha') - L(P, \alpha') < \varepsilon$$

Il teorema del valor medio ci fornisce punti $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tali che $\Delta\alpha_i = \alpha'(t_i)\Delta x_i$ per $i = 1, ..., n$. Se $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, allora:

$$(29) \sum_{i=1}^{n} \mid \alpha'(s_i) - \alpha'(t_i) \mid \Delta x_i < \varepsilon$$

con (28) e il teorema 1.7(b).
Mettiamo $M = \sup \mid f(x) \mid$. Poiché:

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i$$

ne segue da (29) che:

$$(30) \; \mid \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i \mid \leq M\varepsilon$$

In particolare,

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha') + M\varepsilon$$

per ogni scelta di $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, così che:

$$U(P, f, \alpha) \leq U(P, f\alpha') + M\varepsilon$$

Lo stesso ragionamento porta da (30) a:

$$U(P, f\alpha') \leq U(P, f, \alpha) + M\varepsilon$$

Così:

$$(31) \quad | \, U(P, f, \alpha) - U(P, f\alpha') \, | \leq M\varepsilon$$

Ora notiamo che (28) rimane vero se P è sostituito da ogni suo raffinamento. Quindi anche (31) rimane vero.

Si conclude che:

$$| \overline{\int_a^b} f \quad d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx \, | \leq M\varepsilon$$

con ε arbitrario. Quindi:

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x) \, \alpha'(x) \, dx$$

per ogni f limitata. L'uguaglianza dell'integrale inferiore viene da (30) esattamente nello stesso modo.

1.18 Osservazioni:

I due teoremi precedenti illustrano le generalità e le proprietà del processo di integrazione di Stieltjes. Se α è una funziona a scala (questo è il nome dato alle funzioni della forma (22)), l'integrale si riduce a una serie finita o infinita.

Se α ha una derivata integrabile, l'integrale si riduce al normale integrale di Riemann. Questo rende possibile studiare in molti casi serie e integrali contemporaneamente. Per illustrare questo punto, consideriamo un esempio fisico.

Il momento d'inerzia di un filo rettilineo, di lunghezza unitaria, attorno ad un asse passante per uno degli estremi, ortogonale al filo,

$$(*) \; I = \int_0^1 x^2 \, dm$$

dove $m(x)$ è la massa contenuta in una intervallo $[0, x]$.

Se il filo ha densità continua ϕ, cioè, se $m'(x) = \phi(x)$, allora segue che

$$(**) \; I = \int_0^1 x^2 \, \phi(x) \, dx.$$

D'altra parte, se il filo si compone di massa m_i concentrata nei punti x_i, si ottiene

$$(***) \; I = \sum_i x_i m_i.$$

Così (***) contiene (*) e (**) come casi particolari, ma contiene molto altro; per esempio, il caso in cui m è continuo ma non ovunque derivabile.

1.19 Teorema del cambio di variabile:

Supponiamo φ sia una funzione continua strettamente crescente che mappa un intervallo $[A, B]$ in (a, b).

Supponiamo α sia monotona crescente su $[a, b]$ e $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ su $[a, b]$. Definiamo β e g su $[a, b]$ come:

$$(32)\ \beta(y) = \alpha(\varphi(y)) \qquad g(y) = f(\varphi(y))$$

Allora $g \in \mathcal{R}(\beta)$ e:

$$(33)\ \int_A^B g\ d\beta = \int_a^b f\ d\alpha$$

Dimostrazione:

Per ogni partizione $P = \{x_0, ..., x_n\}$ di $[a, b]$ corrisponde una partizione $Q = \{y_0, ..., y_n\}$ di $[A, B]$, così che $x_i = \varphi(y_i)$. Tutte le partizioni di $[A, B]$ sono ottenute in questo modo.

Poiché i valori presi da f su $[x_{i-1}, x_i]$ sono esattamente gli stessi di quelli presi da g su $[y_{i-1}, y_i]$, vediamo che:

$$(34)\ U(Q, g, \beta) = U(P, f, \alpha)$$

$$L(Q, g, \beta) = L(P, f, \alpha)$$

Poiché $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, P può essere scelto così che entrambi $U(P, f, \alpha)$ e $L(P, f, \alpha)$ sono chiusi a $\int \quad d\alpha$. Quindi (34), insieme al teorema 1.6, ci mostra che $g \in \mathcal{R}(\beta)$ e che vale (33).

Ciò completa la dimostrazione.

Osservazione: Notiamo il seguente caso speciale:

Prendiamo $\alpha(x) = x$. Allora $\beta = \varphi$. Assumiamo che $\varphi' \in \mathcal{R}$ su $[A, B]$. Se il teorema 1.17 è applicato a entrambe le parti di (33), otteniamo:

$$(35)\ \int_a^b f(x)\ dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy$$

INTEGRAZIONE E DIFFERENZIAZIONE:

Mostriamo come integrazione e differenziazione, sono, in un certo senso, due operazioni inverse.

1.20 Teorema:
Sia $f \in \mathcal{R}$ su $[a, b]$. Per $a \leq x \leq b$, poniamo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Allora F è continua su $[a, b]$; ancora, se f è continua in $x_0 \in [a, b]$, allora F è derivabile in x_0, e

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Dimostrazione:
Poiché $f \in \mathcal{R}$, f è limitata.
Supponiamo $\mid f(t) \mid \leq M$, per $a \leq t \leq b$.
Se $a \leq x < y \leq b$, allora:

$$\mid F(y) - F(x) \mid = \mid \int_x^y f(t)\, dt \mid \leq M(y - x)$$

per i teoremi 1.12 (c) e (d).
Dato $\varepsilon > 0$, si vede che:

$$\mid F(y) - F(x) \mid < \varepsilon$$

Ciò mostra che $\mid y - x \mid < \frac{\varepsilon}{M}$.
Questo prova la continuità di F.
Ora supponiamo f continua in x_0. Dato $\varepsilon > 0$, scelto $\delta > 0$ tale che:

$$\mid f(t) - f(x_0) \mid < \varepsilon$$

se $\mid t - x_0 \mid < \delta$, e $a \leq t \leq b$.
Quindi, se $x_0 - \delta \leq s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta$ e $a \leq s < t \leq b$,
abbiamo, col teorema 1.12(d),

$$\mid \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \mid = \mid \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]\, du \mid \leq \varepsilon$$

Segue che $F'(x_0) = f(x_0)$.

1.21 Il teorema fondamentale del calcolo

Se $f \in \mathcal{R}$ su $[a, b]$ e se c'è una funzione derivabile F su $[a, b]$ tale che $F' = f$, allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione:

Sia $\varepsilon > 0$. Scelgo una partizione $P = \{x_0, ..., x_n\}$ di $[a, b]$ tale che $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$.

Il teorema del valor medio fornisce punti $t_j \in [x_{i-1}, x_i]$ tale che

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i \qquad i = 1, ..., n$$

Così:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$$

Ora segue dal teorema 1.7(c) che

$$\mid F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\, dx \mid < \varepsilon$$

Perciò vale $\forall \varepsilon > 0$, la dimostrazione è quindi completa.

Osservazione: Osserviamo che se f è continua, l'esistenza di una funzione derivabile F con $F' = f$ è assicurata dal teorema 1.20.

1.22 Teorema (integrazione per parti):

Supponiamo F e G siano due funzioni derivabili su $[a, b]$, $F' = f \in \mathcal{R}$, e $G' = g \in \mathcal{R}$. Allora

$$\int_a^b F(x)\, g(x)\, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)\, G(x)\, dx$$

Dimostrazione:

Mettiamo $H(x) = F(x)G(x)$ e applico il teorema 1.21 ad H e alla sua derivata. Notiamo che $H' \in \mathcal{R}$, per il teorema 1.13.

Capitolo 2

La teoria di Lebesgue

Lo scopo di questo secondo capitolo è quello di presentare i concetti fondamentali della teoria di Lebesgue della misura e dell'integrazione, per vederne i vantaggi e anche al fine di fare un confronto, nel terzo capitolo, con l'integrazione secondo Riemann.

Se A e B sono due insiemi, scriviamo $A - B$ per identificare l'insieme di tutti gli elementi x tali che $x \in A$,$x \notin B$. La notazione $A - B$ non implica che $B \subset A$. Denotiamo l'insieme vuoto con $\emptyset$. Si dice che A e B sono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$.

2.1 Definizione:
Una famiglia $\mathcal{R}$ di insiemi è chiamata un'algebra se $A \in \mathcal{R}$ e $B \in \mathcal{R}$ implica:

$$(1)\ A \cup B \in \mathcal{R} \qquad A - B \in \mathcal{R}$$

Poiché $A \cap B = A - (A - B)$, abbiamo anche che $A \cap B \in \mathcal{R}$, se $\mathcal{R}$ è un'algebra.

Un'algebra R è chiamata σ-algebra se:

$$(2)\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$$

ogni volta che $A_n \in \mathcal{R}(n = 1, 2, ...)$

Poiché $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n)$, abbiamo anche che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$$

se $\mathcal{R}$ è una σ-algebra.

2.2 Definizione:

Si dice che ϕ è una funzione di insieme definita su $\mathcal{R}$ se ϕ assegna per ogni $A \in \mathcal{R}$ un numero $\phi(A)$ del sistema dei numeri reali esteso. ϕ è additiva se $A \cap B = \emptyset$ ed implica:

$$(3)\ \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B)$$

e ϕ è numerabilmente additiva se $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$
implica:

$$(4)\ \phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$$

Supponiamo che l'immagine di ϕ non contenga sia $+\infty$ che $-\infty$, in modo che la parte destra di (3) non perda di significato. E' interessante notare che la parte sinistra di (4) è indipendente dall'ordine in cui, gli A_n sono scritti. Quindi il teorema di riarrangiamento mostra che la parte destra di (4) deve convergere assolutamente se converge; se non converge, le somme parziali tendono a $+\infty$, o a $-\infty$.

Se ϕ è additiva, le proprietà seguenti sono verificabili facilmente:

$$(5)\ \phi(\emptyset) = 0$$

$$(6)\ \phi(A_1 \cup ... \cup A_n) = \phi(A_1) + ... + \phi(A_n)$$

se $A_i \cap A_j = 0$ per ogni $i \neq j$.

$$(7)\ \phi(A_1 \cup A_2) + \phi(A_1 \cap A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2).$$

Se poi $\phi(A) \geq 0 \quad \forall A$, e $A_1 \subset A_2$, allora

$$(8)\ \phi(A_1) \leq \phi(A_2)$$

A causa di (8), le funzioni di insieme additive non negative sono spesso chiamate monotone.

$$(9)\ \phi(A - B) = \phi(A) - \phi(B)$$

se $B \subset A$, e $\mid (\phi B) \mid < +\infty$

2.3 Teorema:

Supponiamo che ϕ sia numerabilmente additiva su un'algebra $\mathcal{R}$. Supponiamo $A_n \in \mathcal{R} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$, $A \in \mathcal{R}$, e:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Allora, se $n \to \infty$,

$$\phi(A_n) \to \phi(A)$$

Dimostrazione:

Mettiamo $B_1 = A_1$, e

$$B_n = A_n - A_{n-1} \qquad (n = 2, 3, ...)$$

Allora $B_i \cap B_j = 0$ per $i \neq j$,
$A_n = B_1 \cup ... \cup B_n$ e $A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Quindi:

$$\phi(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi(B_i)$$

e

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(B_i)$$

COSTRUZIONE DELLA MISURA DI LEBESGUE

2.4 Definizione:

Sia R^P lo spazio euclideo P-dimensionale. Con un intervallo in R^P intendiamo l'insieme di punti $x = \{x_1, ..., x_P\}$ tale che:

$$(10)\ a_i \leq x_i \leq b_i \qquad (i = 1, ..., P)$$

dove qualcuno (o tutti) i segni $\leq$ può eventualmente essere sostituito con $<$.

La possibilità che $a_i = b_i$ per ogni valore di i non è esclusa; in particolare, l'insieme vuoto è incluso fra gli intervalli.

Se A è l'unione di un numero finito di intervalli, A è detto un insieme elementare.

Se I è un intervallo, definiamo:

$$m(I) = \prod_{i=1}^{P}(b_i - a_i),$$

non importa se l'equaglianza è inclusa o esclusa in una delle disequazioni (10).

Se $A = I_1 \cup ... \cup I_n$, e se questi intervalli sono a due a due disgiunti, poniamo:

$$(11)\ m(A) = m(I_1) + ... + m(I_n)$$

Denotiamo $\mathcal{E}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi elementari di R^P. A questo punto, si possono verificare le seguenti proprietà:

(12) $\mathcal{E}$ è un'algebra, ma non una σ-algebra.

(13) Se $A \in \mathcal{E}$, allora A è unione di un numero finito di intervalli disgiunti.

(14) Se $A \in \mathcal{E}$, $m(A)$ è ben definito da (11); cioè, se due differenti scomposizioni di A in intervalli disgiunti sono usate, ciascuna definisce lo stesso valore di $m(A)$.

(15) m è additiva su $\mathcal{E}$.

Notare che se $p = 1, 2, 3$ allora m coincida rispettivamente con lunghezza, area e volume.

2.5 Definizione:

Un funzione di insieme additiva non negativa ϕ definita su $\mathcal{E}$ è detta regolare se per ogni $A \in \mathcal{E}$ e $\forall \varepsilon > 0$ esistono insiemi $F \in \mathcal{E}$, $G \in \mathcal{E}$ tali che F è chiuso, G è aperto, $F \subset A \subset G$, e

$$(16)\ \phi(G) - \varepsilon \leq \phi(A) \leq \phi(F) + \varepsilon$$

2.6 Esempi:

(a) La funzione di insieme m è regolare. Se A è un intervallo, è ovvio che i requisiti della definizione 2.5 sono soddisfatti. Il caso generale segue da (13).

(b) Prendiamo $R^P = R^1$. Sia α una funzione crescente monotona, definita per tutti i numeri reali x.

Mettiamo:

$$\mu([a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-)$$

$$\mu([a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-)$$

$$\mu((a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+)$$

$$\mu((a,b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+)$$

dove $[a,b)$ è l'insieme $a \leq x < b$, ecc.

A causa della possibile discontinuità di α, questi casi devono essere distinti.

Se μ è definita per insiemi elementari come in (11), μ è regolare su $\mathcal{E}$. La dimostrazione è simile a quella di (a).

Il nostro prossimo obiettivo è dimostrare che ogni funzione di insieme regolare su $\mathcal{E}$ può essere estesa a una funzione di insieme numerabilmente additiva su una σ-algebra che contiene $\mathcal{E}$.

2.7 Definizione:

Sia μ additiva, regolare, non negativa e finita su $\mathcal{E}$. Consideriamo i ricoprimenti numerabili di ogni insieme $E \subset R^P$ con aperti elementari A_n:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Definiamo:

$$(17)\ \mu^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

dove l'inf è fatto su tutti i ricoprimenti numerabili di E con insiemi elementari aperti.

$\mu^*(E)$ è chiamata la misura esterna di E, corrispondente a μ.

E' chiaro che $\mu^*(E) \geq 0$, $\forall E$ e che:

$$(18)\ \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$$

se $E_1 \subset E_2$.

2.8 Teorema:

(a) $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$

(b) Se $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, allora: $(19) \mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

Notare che (a) afferma che μ^* è un estensione di μ da $\mathcal{E}$ alla famiglia di tutti i sottoinsiemi di R^P.

La proprietà (19) è chiamata subaddittività.

Dimostrazione:
Scelgo $A \in \mathcal{E}$ e $\varepsilon > 0$.

La regolarità di μ mostra che A è contenuto in un aperto elementare G tale che $\mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$. Perciò $\mu^*(A) \leq \mu(G)$ e siccome ε era arbitrario, abbiamo:

$$(20)\ \mu^*(A) \leq \mu(A)$$

La definizione di μ^* mostra che c'è una successione $\{A_n\}$ di insiemi aperti elementari la cui unione contiene A, tale che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

La regolarità di μ mostra che A contiene un insieme elementare chiuso F tale che $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$; e siccome F è compatto, abbiamo:

$$F \subset A_1 \cup ... \cup A_N$$

per un certo N. Quindi:

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(A_1 \cup ... \cup A_N) + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

In congiunzione con (20), questo prova (a). Ora, supponiamo $E = \cup E_n$, e assumiamo che $\mu^*(E_n) < +\infty$, $\forall n$. Data $\varepsilon > 0$, ricoprimenti $\{A_{nk}\}$, $k = 1, 2, 3, ...$, di E_n con insiemi elementari aperti tali che:

$$(21)\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon$$

Allora:

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

e (19) segue.

Nel caso escluso, cioè quando $\mu^*(E_n) = +\infty$ per un certo n, (19) è ovvia.

2.9 Definizione:
Per certi $A \subset R^P$, $B \subset R^P$, definiamo:

$$(22)\ S(A,B) = (A - B) \cup (B - A)$$

$$(23)\ d(A,B) = \mu^*(S(A,B))$$

Scriviamo $A_n \longrightarrow A$ se:

$$\lim_{n\to\infty} d(A, A_n) = 0$$

Se c'è una successione $\{A_n\}$ di insiemi elementari tale che $A_n \longrightarrow A$, si dice che A è finitamente μ-misurabile e si scrive $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

Se A è l'unione di una collezione numerabile di insiemi finitamente μ-misurabili, si dice che A è μ-misurabile e si scrive $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

$S(A,B)$ è la cosiddetta differenza simmetrica di A e B. Vedremo che $d(A,B)$ è essenzialmente una funzione distanza.

Il seguente teorema ci permetterà di ottenere l'estensione desiderata di μ.

2.10 Teorema:
$\mathcal{M}(\mu)$ è una σ-algebra, e μ^* è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}(\mu)$.

Prima che andiamo alla dimostrazione di questo teorema, vediamo in dettaglio alcune delle proprietà di $S(A,B)$ e di $d(A,B)$.

Abbiamo:

$$(24)\ S(A,B) = S(B,A) \qquad S(A,A) = 0$$

$$(25)\ S(A,B) \subset S(A,C) \cup S(C,B)$$

$$(26) \quad \left.\begin{array}{r} S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$$

(24) è ovvia, e (25) segue da:

$$(A - B) \subset (A - C) \cup (C - B)$$

$$(B - A) \subset (C - A) \cup (B - C)$$

La prima formula di (26) è ottenuta da:

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$$

Ora, scrivendo E^C, complementare di E, abbiamo:

$$S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) = S(A_1^C \cup A_2^C, B_1^C \cup B_2^C) \subset S(A_1^C, B_1^C) \cup S(A_2^C, B_2^C) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$$

e l'ultima formula di (26) si ottiene se si nota che:

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^C$$

Con (23), (19) e (18), le proprietà appena viste di $S(A, B)$ implicano:

$$(27)\ d(A, B) = d(B, A) \qquad d(A, A) = 0$$

$$(28)\ d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

$$(29) \quad \left.\begin{array}{r} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$$

Le relazioni (27) e (28) mostrano che $d(A, B)$ soddisfa i requisiti della definizione di distanza, eccetto che $d(A, B) = 0$ non implica $A = B$. Per esempio, se $\mu = m$, A è numerabile, B è vuoto, abbiamo:

$$d(A, B) = m^*(A) = 0$$

per vedere questo, si ricopre l'n-esimo punto di A con un intervallo I_n così che:

$$m(I_n) < 2^{-n}\varepsilon$$

Ma se si definiscono due insiemi A e B equivalenti, quando:

$$d(A, B) = 0$$

dividiamo i sottoinsiemi di R^P in classi di equivalenza e $d(A, B)$ rende l'insieme di queste classi di equivalenza uno spazio metrico.

$\mathcal{M}_F(\mu)$ è visto quindi come la chiusura di $\mathcal{E}$ rispetto alla topologia indotta da d.

Questa interpretazione non è essenziale per la dimostrazione, ma spiega l'idea di fondo.

Abbiamo quindi bisogno di una nuova proprietà di $d(A, B)$, vale a dire:

$$(30)\ \mid \mu^*(A) - \mu^*(B) \mid \leq d(A, B)$$

se almeno uno tra $\mu^*(A), \mu^*(B)$ è finito.
Supponiamo $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$
allora (28) mostra che:

$$d(A, \emptyset) \leq d(A, B) + d(B, \emptyset)$$

cioè,

$$\mu^*(A) \leq d(A, B) + \mu^*(B)$$

Perciò $\mu^*(B)$ è finito e segue che:

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A, B)$$

Dimostrazione del teorema 2.10
Supponiamo che $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$, $B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Scegliamo $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, così che $A_n \in \mathcal{E}$, $B_n \in \mathcal{E}$, $A_n \longrightarrow A$, $B_n \longrightarrow B$.
Allora (29) e (30) mostrano che:

$$(31)\ A_n \cup B_n \longrightarrow A \cup B$$

$$(32)\ A_n \cap B_n \longrightarrow A \cap B$$

$$(33)\ A_n - B_n \longrightarrow A - B$$

$$(34)\ \mu^*(A_n) \longrightarrow \mu^*(A)$$

e $\mu^*(A) < +\infty$, perciò $d(A_n, A) \longrightarrow 0$. Con (31) e (33), $\mathcal{M}_F(\mu)$ è un'algebra.
Con (7),

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n)$$

Con $n \longrightarrow \infty$, otteniamo, con (34) e con il teorema 2.8(a),

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B)$$

se $A \cap B = \emptyset$, allora $\mu^*(A \cap B) = 0$.
Segue che μ^* è additiva su $\mathcal{M}_F(\mu)$.
Ora sia $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Allora A può essere rappresentata come l'unione di una famiglia numerabile di insiemi disgiunti di $\mathcal{M}_F(\mu)$.
Se $A = \cup A'_n$ con $A'_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$, scriviamo $A_1 = A'_1$, e:

$$A_n = (A'_1 \cup ... \cup A'_n) - (A'_n \cup ... \cup A'_{n-1}) \qquad n = 2, 3, 4, ...$$

Allora:

$$(35)\ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

è la rappresentazione richiesta. Con (19):

$$(36)\ \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

D'altra parte, $A \supset A_1 \cup ... \cup A_n$; e con l'addittività di μ^* su $\mathcal{M}_F(\mu)$ otteniamo:

$$(37)\ \mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup ... \cup A_n) = \mu^*(A_1) + ... + \mu^*(A_n)$$

Le equazioni (36) e (37) implicano:

$$(38)\ \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Supponiamo $\mu^*(A)$ finito. Poniamo $B_n = A_1 \cup ... \cup A_n$. Allora (38) mostra che:

$$d(A, B_n) = \mu^*(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \longrightarrow 0$$

per $n \longrightarrow \infty$. Quindi $B_n \longrightarrow A$; ed essendo $B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$, è facile vedere che $A \in \mathcal{M}(\mu)$ e $\mu^*(A) < +\infty$. E' chiaro che μ^* è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}(\mu)$.

Perciò se $A = \cup A_n$, dove $\{A_n\}$ è una successione di insiemi disgiunti di $\mathcal{M}(\mu)$, abbiamo dimostrato che (38) vale se $\mu^*(A_n) < +\infty \quad \forall n$, e nell'altro caso (38) è ovvia.

Concludendo, abbiamo dimostrato che $\mathcal{M}(\mu)$ è una σ-algebra.

Se $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$, $n = 1, 2, 3, ...$, è chiaro che $\cup A_n \in \mathcal{M}(\mu)$.

Supponiamo $A \in \mathcal{M}(\mu)$, $B \in \mathcal{M}(\mu)$, e:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

dove $A_n, B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Allora l'identità:

$$A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

mostra che $A_n \cap B \in \mathcal{M}(\mu)$; e poiché:

$$\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n) < +\infty$$

$A_n \cap B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Quindi $A_n - B \in \mathcal{M}_F(\mu)$, e $A - B \in \mathcal{M}(\mu)$ poiché:

$$A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B)$$

Ora sostituiamo $\mu^*(A)$ con $\mu(A)$ se $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

Così μ, originariamente definita solo su $\mathcal{E}$, è estesa alle funzioni di insieme numerabilmente addittive sulla σ-algebra $\mathcal{M}(\mu)$. Questa funzione di insieme estesa è chiamata **misura**. Il caso speciale $\mu = m$ è chiamata la **misura di Lebesgue** su R^P.

Osservazioni:

(a) Se A è aperto, allora $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Infatti ogni insieme aperto di R^P è l'unione di una collezione numerabile di intervalli aperti. Per vedere questo, basta costruire una base numerabile i cui membri sono intervalli aperti.

Prendendo i complementari, segue che ogni insieme chiuso è in $\mathcal{M}(\mu)$.

(b) Se $A \in \mathcal{M}(\mu)$ e $\varepsilon > 0$, allora esistono due insiemi F e G tali che $F \subset A \subset G$, dove F è chiuso, G è aperto, e

$$(39)\ \mu(G - A) < \varepsilon, \qquad \mu(A - F) < \varepsilon.$$

La prima disequazione vale poiché μ^* era definita con ricoprimenti per insiemi elementari aperti. La seconda disequazione allora segue prendendo i complementari.

(c) Definiamo la σ-algebra di Borel $\mathcal{B}$ come la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli insiemi aperti. Per l'osservazione (a), $E \in \mathcal{M}(\mu)$ se $E \in \mathcal{B}$.

(d) Se $A \in \mathcal{M}(\mu)$, esistono insiemi di Borel F e G tali che $F \subset A \subset G$, e:

$$(40)\ \mu(G - A) = \mu(A - G) = 0.$$

Questo segue da (b) se prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $n \longrightarrow \infty$.

Siccome $A = F \cup (A - F)$, vediamo che ogni $A \in \mathcal{M}(\mu)$ è unione di un insieme di Borel e un insieme di misura 0.

Gli insiemi di Borel sono μ-misurabili $\forall \mu$. Ma gli insiemi di misura 0 (cioè, gli insiemi E per cui $\mu^*(E) = 0$ possono essere differenti per diversi μ.

(e) $\forall \mu$, gli insiemi di misura 0 formano una σ-algebra.

(f) Nel caso della misura di Lebesgue, ogn insieme numerabile ha misura 0. Ma ci sono insiemi non numerabili (infatti, perfetti) di misura 0.

L'insieme di Cantor può essere preso come esempio.

SPAZI DI MISURA:

2.12 Definizione:

Supponiamo X sia un insieme, non necessariamente un sottoinsieme di uno spazio euclideo, o di qualsiasi spazio metrico. X è detto uno **spazio di misura** se esiste una σ-algebra di $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di X (che sono chiamati insiemi misurabili) e una funzione di insieme numerabilmente additiva non negativa μ (che è detta una misura), definita su $\mathcal{M}$.

Se, in aggiunta, $X \in \mathcal{M}$, allora X è detto uno spazio misurabile.

Per esempio, possiamo prendere $X = R^P$, $\mathcal{M}$ la collezione di tutti i sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue di R^P, e μ misura di Lebesgue.

Oppure, sia X l'insieme degli interi positivi, $\mathcal{M}$ la collezione di tutti i sottoinsiemi di X, e $\mu(E)$ il numero degli elementi di E.

Un altro esempio è fornito dalla teoria della probabilità, dove gli eventi possono essere considerati insiemi, e la probabilità dell'occorrenza degli eventi è una funzione di insieme additiva (o numerabilmente additiva).

Nella prossima sezione tratteremo sempre con spazi misurabili. E' conveniente introdurre la notazione:

$$(41)\ \{x \mid P\}$$

per l'insieme di tutti gli elementi x che hanno la proprietà P.

FUNZIONI MISURABILI

2.13 Definizione:

Sia f una funzione definita sullo spazio misurabile X, con valori nel sistema dei numeri reali esteso.

La funzione f è detta misurabile se l'insieme:

$$(42)\ \{x \mid f(x) > a\}$$

è misurabile $\forall a \in \mathcal{R}$.

2.14 Esempio:

Se $X = R^P$ e $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu)$ come definito della definizione 2.9, ogni f continua è misurabile, poiché allora (42) è un insieme aperto.

2.15 Teorema:
Ognuna delle seguenti quattro condizioni implica le altre tre:
(43)$\{x \mid f(x) > a\}$ è misurabile $\forall a \in \mathcal{R}$
(44)$\{x \mid f(x) \geq a\}$ è misurabile $\forall a \in \mathcal{R}$
(45)$\{x \mid f(x) < a\}$ è misurabile $\forall a \in \mathcal{R}$
(46)$\{x \mid f(x) \leq a\}$ è misurabile $\forall a \in \mathcal{R}$

Dimostrazione:
Le relazioni:
$\{x \mid f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \mid f(x) > a - \frac{1}{n}\}$
$\{x \mid f(x) < a\} = X - \{x \mid f(x) \geq a\}$
$\{x \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \mid f(x) < a + \frac{1}{n}\}$
$\{x \mid f(x) > a\} = X - \{x \mid f(x) \leq a\}$
mostrano successivamente che (43) implica (44); (44) implica (45); (45) implica (46) e (46) implica (43). Quindi qualsiasi di queste condizioni può essere usata al posto di (42) per definire la misurabilità.

2.16 Teorema:
Se f è misurabile, allora $\mid f \mid$ è misurabile.

Dimostrazione:

$$\{x \; t.c. \mid f(x) \mid < a\} = \{x \; t.c. f(x) < a\} \cap \{x \; t.c. f(x) > -a\}$$

2.17 Teorema:
Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili. Per $x \in X$, poniamo:

$$g(x) = \sup \; f_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

$$h(x) = \lim_{x \to \infty} \sup \; f_n(x)$$

Allora g e h sono misurabili.
Lo stesso è ovviamente vero per l'inf e il lim inf.

Dimostrazione:

$$\{x \mid g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \mid f_n(x) > a\}$$

$$h(x) = \inf \; g_m(x)$$

dove $g_m(x) = \sup \; f_n(x) \qquad (n \geq m)$

Corollari:
(a) Se f e g sono misurabili, allora $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ sono misurabili.
Se:

$$(47)\ f^+ = \max(f, 0) \qquad f^- = -\min(f, 0)$$

ne segue, in particolare, che f^+ e f^- sono misurabili.
(b) Il limite di una successione convergente di funzioni misurabili è misurabile.

La (a) segue dal fatto che se f e g sono funzioni misurabili, allora $\max f, g$ e $\min(f, g)$ sono misurabili nel loro dominio perchè $\max\{f, g\} = \sup\{f, g, g, g, g, ...\}$. Basta poi prendere $g = 0$.

2.18 Teorema:
Siano f, g funzioni misurabili a valori reali definite su X, sia F reale e continua su R^2, e poniamo:

$$h(x) = F(f(x), g(x)) \qquad (x \in X)$$

Allora h è misurabile.
In particolare, $f + g$ e fg sono misurabili.

Dimostrazione:
Sia $G_a = \{(u, v) \mid F(u, v) > a\}$
Allora G_a è un sottoinsieme aperto di R^2, e possiamo scrivere:

$$G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

dove $\{I_n\}$ è una successione di intervalli aperti:

$$I_n = \{(u, v) \mid a_n < u < b_n, c_n < v < d_n\}.$$

Perciò:

$$\{x \mid a_n < f(x) < b_n\} = \{x \mid f(x) > a_n\} \cap \{x \mid f(x) < b_n\}$$

è misurabile. Ne segue che anche l'insieme:

$$\{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x \mid a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \mid c_n < g(x) < d_n\}$$

è misurabile. Quindi lo stesso è vero di:

$$\{x \mid h(x) > a\} = \{x \mid (f(x), g(x)) \in G_a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\}$$

Riassumendo, possiamo dire che tutte le operazioni ordinarie di analisi, incluse le operazioni di limite, quando applicate a funzioni misurabili, danno funzioni misurabili.

FUNZIONI SEMPLICI:

2.19 Definizione:
Sia s una funzione a valori reali definita su X. Se l'immagine di s è finita, possiamo dire che s è una funzione semplice.
Sia $E \subset X$, e ponendo:

$$(48)\ K_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

K_E è chiamata la funzione caratteristica di E.
Supponiamo che l'immagine di s consista nei numeri distinti $c_1, ..., c_n$. Sia:

$$E_i = \{x \mid s(x) = c_i\} \qquad (i = 1, ..., n)$$

Allora:

$$(49)\ s = \sum_{n=1}^{n} c_i K_{E_i},$$

cioè, ogni funzione semplice è la combinazione lineare di funzioni caratteristiche. E' chiaro che s è misurabile se e solo se gli insiemi $E_1, ..., E_n$ sono misurabili.
E' interessante che ogni funzione può essere approssimata con funzioni semplici.

2.20 Teorema:
Sia f una funzione reale su X. Allora esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici così che $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ per $n \longrightarrow \infty$, $\forall x \in X$. Se f è misurabile, $\{s_n\}$ può essere scelta come una successione di funzioni misurabili. Se $f \geq 0$, $\{s_n\}$ può essere scelta come una successione monotona crescente.

Dimostrazione:
Se $f \geq 0$, definiamo:

$$E_{ni} = \{x \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\},$$

$$F_n = \{x \mid f(x) \geq n\}$$

per $n = 1, 2, 3, ...$ $\qquad i = 1, 2, ..., n2^n$.
Poniamo:

$$(50)\ s_n = \sum_{i=1}^{n} 2^n \frac{i-1}{2^n} K_{E_{ni}} + nK_{F_n}.$$

Nel caso generale, sia $f = f^+ - f^-$, e applico la precedente costruzione a f^+ e a f^-. Si noti che la successione $\{s_n\}$ data da (50) converge uniformemente a f se f è limitata.

INTEGRAZIONE

Definiamo l'integrazione su uno spazio misurabile X, nel quale $\mathcal{M}$ è la σ-algebra di insiemi misurabili, e ν è la misura. Se si volesse visualizzare una situazione più concreta si può pensare che X sia la retta reale, o un intervallo, e ν sia la misura di Lebesgue m.

2.21 Definizione:
Supponiamo che la funzione semplice:

$$(51)\ s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x) \qquad (x \in X, c_i > 0)$$

sia misurabile, e supponiamo $E \in \mathcal{M}$.
Definiamo:

$$(52)\ I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \nu(E \cap E_i).$$

Se f è misurabile e non negativa, definiamo

$$(53)\ \int_E f\ d\nu = \sup\ I_E(s),$$

dove il sup è preso su tutte le funzioni semplici misurabili s tali che $0 \leq s \leq f$.

Il membro sinistro di (53) è chiamato **integrale di Lebesgue** di f, rispetto alla misura ν, sull'insieme E.

Si noti che l'integrale può anche avere valore $+\infty$.

E' facile verificare che:

$$(54) \quad \int_E s \, d\nu = I_E(s)$$

per ogni funzione semplice misurabile non negativa s.

2.22 Definizione:

Sia f misurabile, e consideriamo i due integrali:

$$(55) \quad \int_E f^+ \, d\nu, \qquad \int_E f^- \, d\nu,$$

dove f^+ e f^- sono definite come in (47).

Se almeno uno degli integrali (55) è finito, definiamo:

$$(56) \quad \int_E f \, d\nu = \int_E f^+ \, d\nu - \int_E f^- \, d\nu.$$

Se entrambi gli integrali (55) sono finiti, allora (56) è finito, e diciamo che f è integrabile su E secondo Lebesgue rispetto a μ; scriviamo $f \in \mathcal{L}(\mu)$ su E.

Se $\mu = m$, la notazione solitamente usata è: $f \in \mathcal{L}$ su E.

La nostra terminologia può fare confusione. Se (56) è $+\infty$ o $-\infty$, allora l'integrale di f su E è definito, ma f non è integrabile: f è integrabile su E se e solo se il suo integrale su E è finito.

Osservazioni:

Le seguenti proprietà sono evidenti:

(a) Se f è misurabile e limitata su E, e se $\nu(E) < +\infty$, allora $f \in \mathcal{L}(\nu)$ su E.

(b) Se $a \leq f(x) \leq b$ per $x \in E$, e $\nu(E) < +\infty$, allora $a\nu(E) \leq \int_E f \, d\nu \leq b\nu(E)$

(c) Se f e $g \in \mathcal{L}(\nu)$ su E, e se $f(x) \leq g(x)$ per $x \in E$, allora $\int_E f \, d\nu \leq \int_E g \, d\nu$

(d) Se $f \in \mathcal{L}(\nu)$ su E, allora $cf \in \mathcal{L}(\nu)$ su E, $\forall c$ costante, e $\int_E c \, f \, d\nu = c \int_E f \, d\nu$

(e) Se $\nu(E) = 0$, e f è misurabile, allora $\int_E f \, d\nu = 0$

(f) Se $f \in \mathcal{L}(\nu)$ su E, $A \in \mathcal{M}$, e $A \subset E$, allora $f \in \mathcal{L}(\nu)$ su A.

2.24 Teorema:

(a) Supponiamo che f sia misurabile e non negativa su X. Per $A \in \mathcal{M}$, definiamo:

(57)

$$\Phi(A) = \int_A f \, d\nu.$$

Allora Φ è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$.

(b) La stessa conclusione vale se $f \in \mathcal{L}(\nu)$ su X.

Dimostrazione:

E' chiaro che (b) segue da (a) scrivendo $f = f^+ - f^-$ e applicando (a) a f^+ e a f^-. Per provare (a), dobbiamo mostrare che:

(58)

$$\Phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$$

se $A_n \in \mathcal{M}(n = 1, 2, 3, ...)$, $A_i \cap A_j = 0$ per $i \neq j$, e $A = \bigcup_1^\infty A_n$.

Se f è una funzione caratteristica, allora la numerabilità additiva di Φ viene dalla numerabilità additiva di ν, quindi:

$$\int_A K_E \, d\nu = \nu(A \cap E)$$

Se f è semplice, allora f è della forma (51), e la conclusione vale ancora.

Nel caso generale, abbiamo, per ogni funzione semplice misurabile s così che $0 \leq s \leq f$,

$$\int_A s \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s \, d\nu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$$

Quindi, da (53),

(59)

$$\Phi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$$

Ora se $\Phi(A_n) = +\infty$ per un certo n. (58) è ovvia, perciò $\Phi(A) \geq \Phi(A_n)$.

Supponiamo $\Phi(A_n) < +\infty$ per ogni n.

Dato $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere una funzione semplice s così che $0 \leq s \leq f$, e così che

(60)

$$\int_{A_1} s \, d\nu \geq \int_{A_1} f \, d\nu - \varepsilon,$$

$$\int_{A_2} s\ d\nu \geq \int_{A_2} f\ d\nu - \varepsilon$$

Quindi

$$\Phi(A_1 \cup A_2) \geq \int_{A_1 \cup A_2} s\ d\nu = \int_{A_1} s\ d\nu + \int_{A_2} s\ d\nu \geq \Phi(A_1) + \Phi(A_2) - 2\varepsilon,$$

così che

$$\Phi(A_1 \cup A_2) \geq \Phi(A_1) + \Phi(A_2)$$

Ne segue che abbiamo, per ogni n,
(61)

$$\Phi(A_1 \cup ... \cup A_n) \geq \Phi(A_1) + ... + \Phi(A_n).$$

Poiché $A \supset A_1 \cup ... \cup A_n$, (61) implica:
(62)

$$\Phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n),$$

e (58) segue da (59) e (62).

Corollario:
Se $A \in \mathcal{M}$, $B \subset A$ e $\nu(A - B) = 0$, allora:

$$\int_A f\ d\nu = \int_B f\ d\nu.$$

Poiché $A = B \cup (A - B)$, questo segue dall'osservazione 11.23(e).

2.25 Osservazioni:
Il precedente corollario mostra che gli insiemi di misura 0 sono trascurabili nell'integrazione. Scriviamo $f \sim g$ su E se l'insieme

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

ha misura 0.

Allora $f \sim f$; $f \sim g$ implica $g \sim f$; e $f \sim g$, $g \sim h$ implica $f \sim h$. Cioè, la relazione $\sim$ è una relazione d'equivalenza.

Se $f \sim g$ su E, chiaramente abbiamo:

$$\int_A f\ d\nu = \int_A g\ d\nu,$$

purchè gli integrali esistano, per ogni sottoinsieme misurabile A di E.

Se una proprietà P vale $\forall x \in E - A$, e se $\nu(A) = 0$, è consuetudine dire che P vale per quasi tutti gli $x \in E$, o che P vale quasi ovunque su E.

2.26 Teorema:

Se $f \in \mathcal{L}(\nu)$ su E, allora $| f | \in \mathcal{L}(\nu)$ su E, e:

(63)

$$| \int_E f \, d\nu | \leq \int_E | f | \, d\nu$$

Dimostrazione:

Scriviamo $E = A \cup B$, dove $f(x) \geq 0$ su A e $f(x) < 0$ su B. Con il teorema 2.24,

$$\int_E | f | \, d\nu = \int_A | f | \, d\nu + \int_B | f | \, d\nu = \int_A f^+ \, d\nu + \int_B f^- \, d\nu < +\infty,$$

così che $| f | \in \mathcal{L}(\nu)$. Poiché $f \leq | f |$ e $-f \leq | f |$, vediamo che:

$$\int_E f \, d\nu \leq \int_E | f | \, d\nu \qquad -\int_E f \, d\nu \leq \int_E | f | \, d\nu,$$

e (63) segue.

Poiché l'integrabilità di f implica l'integrabilità di $| f |$, l'integrale di Lebesgue è spesso chiamato un integrale assolutamente convergente. E' naturalmente possibile definire integrali convergenti ma non assolutamente convergenti.

Questi integrali però mancano di alcune utili proprietà degli integrali di Lebesgue e svolgono un ruolo meno importante in analisi.

2.27 Teorema:

Supponiamo f misurabile su E, $| f | \leq g$, e $g \in \mathcal{L}(\nu)$ su E. Allora $f \in \mathcal{L}(\nu)$ su E.

Dimostrazione:

Abbiamo $f^+ \leq g$ e $f^- \leq g$.

2.28 Teorema della convergenza monotona di Beppo-Levi:
Supponiamo $E \in \mathcal{M}$. Sia $\{f_m\}$ una successione di funzioni misurabili così che:
(64)
$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...(x \in E)$$
Sia f definita da:
(65)
$$f(x) = \sup_n f_n(x) \qquad (x \in E)$$
con $n \to \infty$. Allora:
(66)
$$\int_E f_n \, d\nu \longrightarrow \int_E f \, d\nu \qquad (n \to \infty)$$

Dimostrazione:
Con (64) è evidente che, con n tendente a infinito,
(67)
$$\int_E f_n \, d\nu \longrightarrow \alpha$$
per un certo α; e poiché $\int f_n \leq \int f$, abbiamo:
(68)
$$\alpha \leq \int_E f \, d\nu.$$

Scegliamo c così che $0 < c < 1$, e sia s una funzione semplice misurabile tale che $0 \leq s < f$. Posto:
$$E_n = \{x \mid f_n(x) \geq cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$
Con (64), $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset ...$; e con (65),
(69)
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$
Per ogni n,
(70)
$$\int_E f_n \, d\nu \geq \int_{E_n} f_n \, d\nu \geq c \int_{E_n} s \, d\nu.$$
Facciamo il limite per $n \longrightarrow \infty$ in (70). Poiché l'integrale è una funzione di insieme numerabilmente additiva (per il teorema 2.24), (69) mostra che possiamo applicare il teorema 2.3 all'ultimo integrale in (70), e otteniamo:

(71)
$$\alpha \geq c\int_E s\,d\nu$$
Facendo tendere $c \longrightarrow 1$, si vede che:
$$\alpha \geq \int_E s\,d\nu$$
e (53) implica:
(72)
$$\alpha \geq \int_E f\,d\nu.$$
Il teorema segue da (67), (68) e (72).

2.29 Teorema:
Supponiamo $f = f_1 + f_2$, dove $f_i \in \mathcal{L}(\nu)$ su E con $i = 1, 2$. Allora $f \in \mathcal{L}(\nu)$ su E, e:
(73)
$$\int_E f\,d\nu = \int_E f_1\,d\nu + \int_E f_2\,d\nu.$$

Dimostrazione:
Prima cosa, supponiamo che $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$. Se f_1 e f_2 sono semplici, (73) segue banalmente da (52) e (54). Altrimenti, scelgo successioni monotone crescenti $\{s'_n\}$, $\{s''_n\}$ di funzioni semplici misurabili non negative che convergono a f_1, f_2. Il teorema 2.20 mostra che ciò è possibile. Ponendo $s_n = s'_n + s''_n$. Allora:
$$\int_E s_n\,d\nu = \int_E s'_n\,d\nu + \int_E s''_n\,d\nu,$$
e (73) segue per n tendente a infinito e appellandosi al teorema 2.28.
Supponiamo poi che $f_1 \geq 0$, $f_2 \leq 0$. Poniamo:
$$A = \{x \mid f(x) \geq 0\}, \qquad B = \{x \mid f(x) < 0\}.$$
Allora $f, f_1, -f_2$ sono non negativi su A. Quindi:
(74)
$$\int_A f_1\,d\nu = \int_A f\,d\nu + \int_A (-f_2)\,d\nu = \int_A f\,d\nu - \int_A f_2\,d\nu$$
Allo stesso modo, $-f, f_1, -f_2$ sono non negativi su B, così che:

$$\int_B (-f_2)\, d\nu = \int_B f_1\, d\nu + \int_B (-f)\, d\nu,$$

o:
(75)

$$\int_B f_1\, d\nu = \int_B f\, d\nu - \int_B f_2\, d\nu,$$

e (73) segue se aggiungiamo (74) e (75).

Nel caso generale, E può essere decomposto in quattro insiemi E_i su cui ciascuno $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono di segno costante. I due casi che abbiamo dimostrato finora implicano:

$$\int_{E_i} f\, d\nu = \int_{E_i} f_1\, d\nu + \int_{E_i} f_2; d\nu \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

e (73) segue aggiungendo queste quattro equazioni. Siamo ora in una posizione per poter riformulare il teorema 2.28 utilizzando il concetto di serie.

2.30 Teorema:
Supponiamo $E \in \mathcal{M}$. Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative e:
(76)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E)$$

allora

$$\int_E f\, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\, d\nu.$$

Dimostrazione:
Le somme parziali di (76) formano una successione monotona crescente.

2.31 Teorema di Fatou:
Supponiamo $E \in \mathcal{M}$. Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative e:

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E),$$

allora:

(77)
$$\int_E f\ d\nu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\ d\nu.$$

Dimostrazione:
Per $n = 1, 2, 3, ...$ e $x \in E$, ponendo:

$$g_n(x) = \inf f_i(x) \qquad (x \ge n)$$

Allora g_n è misurabile su E, e

$$(78)\ 0 \le g_1(x) \le g_2(x) \le ...$$

$$(79)\ g_n(x) \le f_n(x)$$

$$(80)\ g_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

Con (78), (80) e il teorema 2.28,

$$(81)\ \int_E g_n\ d\nu \longrightarrow \int_E f\ d\nu,$$

così che (77) segue da (79) e (81).

2.32 Teorema della convergenza dominata di Lebesgue:
Supponiamo $E \in \mathcal{M}$. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che:

$$(82)\ f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad (x \in E)$$

con $n \longrightarrow \infty$. Se esiste una funzione $g \in \mathcal{L}(\nu)$ su E, tale che:

$$(83)\ \ | f_n(x) | \le g(x) \qquad (n = 1, 2, 3, ..., x \in E),$$

allora:

$$(84)\ \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\ d\nu = \int_E f\ d\nu.$$

A causa di (83), $\{f_n\}$ è detto essere dominato da g, e si parla di convergenza dominata. Con l'osservazione 2.25, la conclusione è la stessa se (82) vale quasi ovunque su E.

Dimostrazione:

Per prima cosa, (83) e il teorema 2.27 implicano che $f_n \in \mathcal{L}(\nu)$ e $f \in \mathcal{L}(\nu)$ su E.

Poiché $f_n + g \geq 0$, il teorema di Fatou mostra che:

$$\int_E (f+g)\, d\nu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (f_n + g)\, d\nu$$

o

$$(85) \quad \int_E f\, d\nu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\nu.$$

Poiché $g - f_n \geq 0$, vediamo similarmente che

$$\int_E (g-f)\, d\nu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E (g - f_n)\, d\nu,$$

così che:

$$-\int_E f\, d\nu \leq \lim \liminf_{n\to\infty} [-\int_E f_n\, d\nu],$$

che è lo stesso di

$$(86) \quad \int_E f\, d\nu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f\, d\nu.$$

L'esistenza del limite in (84) e l'equazione in (84) seguono da (85) e (86).

Corollario:

Se $\nu(E) < +\infty$, $\{f_n\}$ è uniformemente limitata su E, e $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ su E, allora (84) vale.

Capitolo 3

Confronto integrale Riemann e integrale Lebesgue

Il prossimo teorema mostra che ogni funzione limitata che è integrabile secondo Riemann su un intervallo chiuso e limitato è anche integrabile secondo Lebesgue, e che le funzioni integrabili secondo Riemann sono soggette a delle condizioni rigorose di continuità.

Oltre al fatto che la teoria di Lebesgue ci permette di integrare una classe molto più ampia di funzioni, il vantaggio più grande si trova nella facilità con cui i passaggi al limite possono essere effettuati.

Sia X lo spazio di misura dell'intervallo $[a, b]$ sulla retta reale, con $\nu = m$ (la misura di Lebesgue), e $\mathcal{M}$ la famiglia di sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue su $[a, b]$.

Invece di:

$$\int_X f \, dm$$

è consueto scrivere:

$$\int_a^b f \, dx$$

per l'integrale di Lebesgue di f su $[a, b]$. Per distinguere gli integrali di Riemann da quelli di Lebesgue, ora denoteremo questi ultimi con:

$$\mathcal{R} \int_a^b f \, dx.$$

3.1 Teorema:
Se $f \in \mathcal{R}$ su $[a,b]$, allora $f \in \mathcal{L}$ su $[a,b]$, e

$$(87)\quad \int_a^b f\ dx = \mathcal{R}\int_a^b f\ dx$$

Inoltre, $f \in \mathcal{R}$ su $[a,b]$ se e solo se f è continua quasi ovunque su $[a,b]$.

Dimostrazione:
Per la definizione 1.1 e il teorema 1.4 esiste una successione $\{P_k\}$ di partizioni di $[a,b]$, così che P_{k+1} è un raffinamento di P_k. Quindi la distanza tra punti adiacenti di P_k è minore di $\frac{1}{k}$, e così che:

$$(88)\quad \lim_{k\to\infty} L(P_k,f) = \mathcal{R}\underline{\int} f\ dx,$$

$$\lim_{k\to\infty} U(P_k,f) = \mathcal{R}\overline{\int} f\ dx.$$

In questa dimostrazione tutti gli integrali sono presi su $[a,b]$
Se $P_k = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ con $x_0 = 0$, $x_n = b$, definiamo:

$$U_k(a) = L_k(a) = f(a);$$

Messo $U_k(x) = m_i$ e $L_k(x) = m_i$ per $x_{i-1} < x \le x_i$ e $1 \le i \le n$.
Allora:

$$(89)\ L(P_k,f) = \int L_k\ dx \qquad U(P_k,f) = \int U_k\ dx$$

e

$$(90)\ L_1(x) \le L_2(x) \le ... \le f(x) \le ... \le U_2(x) \le U_1(x)$$

per tutti gli$x \in [a,b]$, poiché P_{k+1} raffina P_k.
Per (90), esistono:

$$(91)\ L(x) = \lim_{k\to\infty} L_k(x), \qquad U(x) = \lim_{k\to\infty} U_k(x)$$

Osservare che L e U sono funzioni misurabili limitate su $[a,b]$, e che:

$$(92)\ L(x) \le f(x) \le U(x) \qquad (a \le x \le b)$$

e che:

$$(93)\quad \int L\ dx = \mathcal{R}\overline{\int} f\ dx$$

$$\int U\ dx = \mathcal{R}\underline{\int} f\ dx$$

con (88), (90), e il teorema della convergenza monotona.

Finora, niente è stato presupposto su f tranne che f sia una funzione reale limitata su $[a,b]$. Per completare la dimostrazione, si deve notare che $f \in \mathcal{R}$ se e solo se il suo integrale superiore e il suo integrale inferiore secondo Riemann sono uguali, quindi se e solo se:

$$(94)\ \int L\ dx = \int U\ dx.$$

poiché $L \leq U$, (94) vale se e solo se $L(x) = U(x)$ per quasi tutti $x \in [a,b]$.

In questo caso, (92) implica che:

$$(95)\ L(x) = f(x) = U(x)$$

quasi ovunque su $[a,b]$, così che f è misurabile, e (87) segue da (93) e (95).

Ancora, se x non appartiene a nessun P_k, è abbastanza facile vedere che $U(x) = L(x)$ se e solo se f è continua su x.

Poiché l'unione degli insiemi P_k è numerabile, la sua misura è 0, e concludiamo che f è continua quasi ovunque su $[a,b]$ se e solo se $L(x) = U(x)$ quasi ovunque, quindi (come abbiamo visto sopra) se e solo se $f \in \mathcal{R}$. Questo completa la dimostrazione.

La connessione familiare tra integrazione e differenziazione è in larga misura estendibile alla Teoria di Lebesgue. Se $f \in \mathcal{L}$ su $[a,b]$, e:

$$(96)\ F(x) = \int_a^x f\ dt \qquad (a \leq x \leq b),$$

allora $F'(x) = f(x)$ quasi ovunque su $[a,b]$.

Viceversa, se F è differenziabile su ogni punto di $[a,b]$ ('quasi ovunque' non è abbastanza qui!) e se $F' \in \mathcal{L}$ su $[a,b]$, allora:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) \qquad (a \leq x \leq b).$$

Osservazione:

Nel caso degli integrali impropri non è sempre vero che una funzione integrabile secondo Riemann è anche integrabile secondo Lebesgue. Per esempio consideriamo la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ in $[1, +\infty)$. Secondo Riemann abbiamo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx := \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x}\,dx$$

e questo limite esiste ed è finito, come è possibile verificare integrando per parti e applicando il criterio del confronto, ma:

$$\int_1^{+\infty} \mid \frac{\sin x}{x} \mid \,dx = +\infty$$

Allora esiste l'integrale di Riemann (improprio) ma non esiste l'integrale di Lebesgue. Invece, se $u : [1, +\infty) \to \mathcal{R}$ è assolutamente integrabile nel senso di Riemann, alora è integrabile secondo Lebesgue (con lo stesso integrale).

Capitolo 4

Presentazioni alternative dell'integrale di Riemann

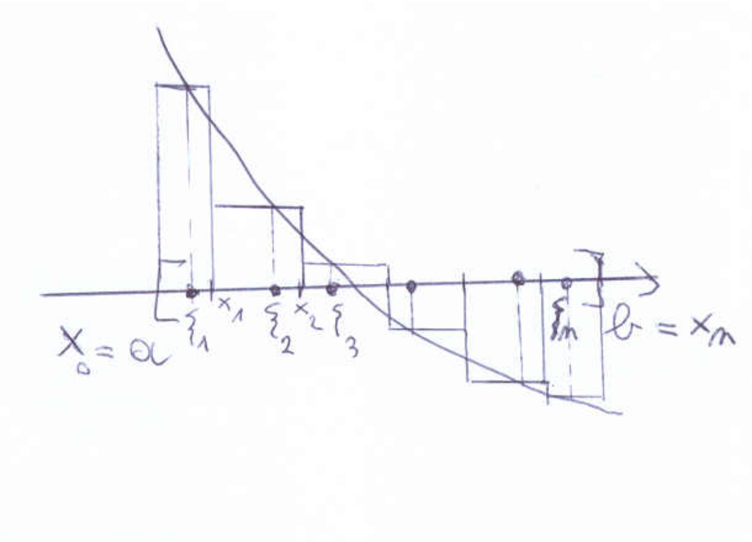
Vediamo altri due modi elementari di introdurre l'integrale, entrambi equivalenti all'integrale di Riemann. Si trovano abbastanza spesso sui testi, perché particolarmente semplici e naturali.

L'integrale alla Cauchy:

4.1 Definizione:
Dato un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ di $\mathcal{R}$, data $f : [a, b] \to \mathcal{R}$. Sia data una partizione P di $[a, b]$, cioè $\{x_0, ..., x_n\}$. Sia data la n-pla $E = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$, con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, per $i \in [1, ..., n]$.

Si definisce **somma di Cauchy** associata a P e E:

$$S(P, E, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$



4.2 Definizione:

Si dice che una funzione f è integrabile alla Cauchy se il limite delle somme di Cauchy, al tendere a zero della lunghezza degli intervallini della partizione esiste e non dipende nè dalla particolare scelta delle partizioni, nè dalla scelta dei punti ξ_i.

Nel primo capitolo abbiamo visto che per definizione
f è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ se e solo se:

$$\inf U(P, f) = \sup L(P, f)$$

4.4 Teorema:

Una funzione f limitata è integrabile secondo Riemann se e solo se è integrabile alla Cauchy, e i due integrali sono uguali.

Dimostrazione:

Sia f integrabile secondo Riemann. Se $S(P, E, f)$ è una somma di Cauchy si ha:

$$L(P, f) \leq S(P, E, f) \leq U(P, f)$$

Passando al sup a sinistra e all'inf a destra, otteniamo che la funzione è integrabile alla Cauchy, e che l'integrale di Cauchy coincide con l'integrale di Riemann.

Per il viceversa basta far vedere che, data una qualunque partizione P di $[a, b]$ e dato $\varepsilon > 0$, esiste una somma di Cauchy $S(P, E, f)$ tale che:

$$(*)\ S(P,E,f) \geq U(P,f) - \varepsilon :$$

se questo è vero, avremo che l'integrale di Riemann superiore di f coincide con l'integrale di Cauchy.

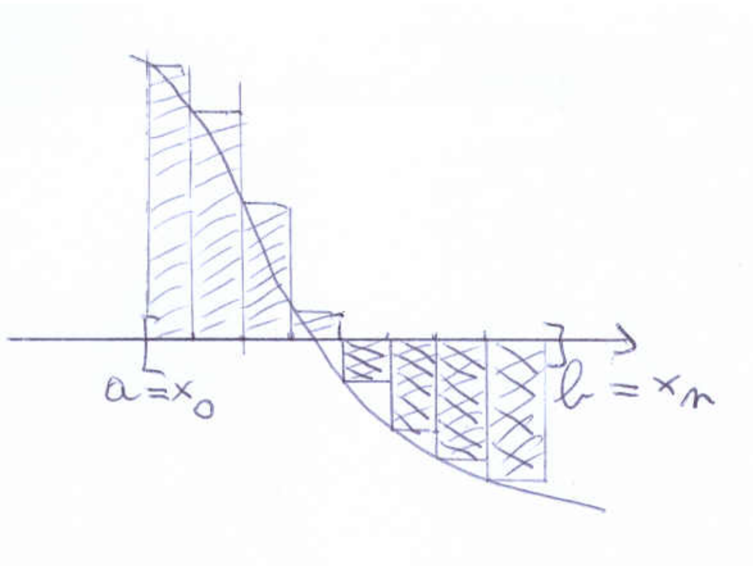
Per dimostrare (*), sia $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ la partizione. Nell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, basta prendere ξ_i tale che:

$$f(\xi_i) \geq \sup_{[x_i, x_{i-1}]} f(x) - \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

per avere (*).

In maniera analoga si ottiene che l'integrale inferiore di Riemann coincide con l'integrale di Cauchy.

Integrale di Riemann con partizioni in n intervalli uguali



4.5 Definizione:

Sia a, b un intervallo. Sia P_n una partizione di $[a,b]$ che divide l'intevallo $[a,b]$ in n parti uguali di lunghezza $\frac{b-a}{n}$.

4.6 Teorema:

Una funzione f limitata è integrabile secondo Riemann se e solo se:

$$\lim_{n\to+\infty} U(P_n, f) = \lim_{n\to+\infty} L(P_n, f)$$

Dimostrazione:

Evidentemente, se f è integrabile secondo Riemann lo sarà anche in questo nuovo senso. Viceversa, si deve dimostrare che non è restrittivo prendere partizioni in parti uguali piuttosto che prendere intervalli di lunghezza qualsiasi.

Sia $[a, b]$ un intervallo, sia $P_n = \{x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$ in parti uguali di lunghezza $\frac{b-a}{n}$.

Per ipotesi abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to+\infty} L(f, P_n)$$

Dobbiamo mostrare che si ha:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Quindi basta far vedere che:

$$(*)\ \lim_{n\to+\infty} U(f, P_n) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

(perché evidentemente $\lim_{n\to+\infty} U(P_n, f) \geq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$).

e che:

$$(**)\ \lim_{n\to+\infty} L(f, P_n) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

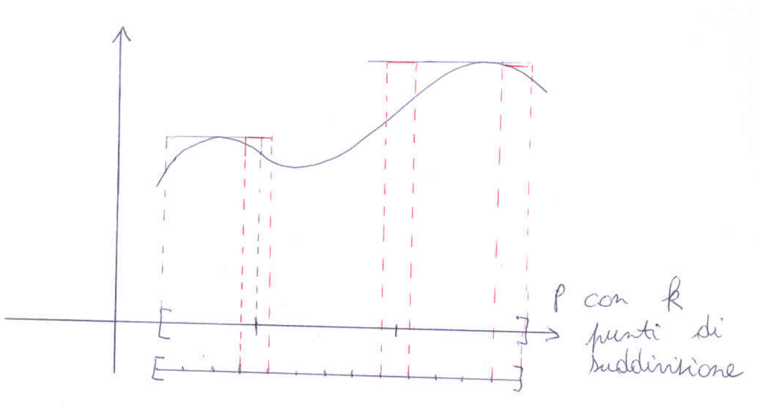
Dimostriamo (*). La (**) si dimostra in modo analogo.

Sia P una partizione qualunque di $[a, b]$, $U(f, P)$ sia la corrispondente somma superiore.

Faccio vedere che $\forall\varepsilon > 0\ \exists n > 0$ tale che:

$$U(f, P_n) \leq U(f, P) + \varepsilon$$

Intanto f è limitata, cioè $\exists M$ tale che $\mid f \mid \leq M$.



Si vede facilmente dalla figura che l'errore che si commette sostituendo $U(P,f)$ con $U(P_n,f)$ è:

$(\frac{b-a}{n}M)k \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

dove k è il numero di punti della partizione P e supponiamo n abbastanza grande, in modo che in ogni intervallino della partizione P_n cada al più un punto della partizione P. In tutti gli intervallini di P_n che non contengono punti di P, l'estremo superiore di f sarà più basso di quello originale. Negli altri k intervallini, l'addendo della somma superiore di Riemann è al più $\frac{b-a}{n}M$.

Quindi a patto di prendere n abbastanza grande, l'errore è minore di ε. Se ne deduce che prendere una partizione con intervalli non di uguale lunghezza o intervalli di lunghezza uguale è in realtà la stessa cosa. Segue che l'integrale di Riemann e l'integrale di Riemann con partizioni su n intervalli uguali, se esistono, sono uguali.

Capitolo 5

Cenni storici

Alle origini del calcolo integrale sta il metodo di esaustione della matematica greca. Questo metodo fu usato con successo da Archimede per il calcolo dell'area del segmento parabolico e del cerchio: in una certo senso, l'idea è simile a quella dell'integrale di Riemann in quanto la superficie curvilinea viene approssimata, da dentro e da fuori, con dei poligoni. Questa idea dei 'geometrici' dell'integrale si perse un pò all'inizio degli studi sul calcolo infinitesimale: nel 1742, Johann Bernoulli definì l'integrazione come operazione inversa della derivazione. Per tutto il Settecento la sua definizione fu accettata nonostante presupponga la continuità della funzione integrante. Essa iniziò a mostrare tutte le sue lacune dal momento in cui Fourier studiando le serie trigonometriche si trovò a dover integrare delle funzioni discontinue, come ad esempio la funzione che vale 1 nell'intervallo$[0, 1]$ e 0 altrove, funzioni che chiaramente non potevano essere derivate di qualcosa. Quindi per definire l'integrale di queste funzioni Fourier tornò al vecchio concetto di area.

In seguito Cauchy, stimolato dagli studi di Fourier, rivide la definizione di integrale in termini di primitive e la sostituì, stavolta in modo rigoroso, con una sua definizione di integrale indipendente dalla derivata.

L'integrale è introdotto in maniera indipendente dalla derivata, salvo poi confrontare le due operazioni, riprendendo con ciò un punto di vista in un certo senso più simile alle idee sulla misura delle figure che si erano sviluppate con Cavalieri e i suoi seguaci e che, accantonate con l'affermarsi del calcolo infinitesimale, erano state riprese da Fourier.

La nuova definizione di Cauchy presentava ancora vari aspetti non soddisfacenti, sui quali si svilupperanno successivamente delle critiche. Tra questi, la mancanza di una chiara distinzione fra continuità e uniforme continuità, oggetto in seguito di studi da parte di Weierstrass e la mancanza di una definizione rigorosa dei numeri reali, senza la quale l'esistenza del limite delle somme non può essere dimostrata.

Un inconveniente particolarmente grave era poi il fatto che questa definizione di integrale valesse solo per le funzioni continue o al più con un numero finito di punti di discontinuità, una limitazione che ne restringeva l'uso.

Il tentativo di sviluppare in serie trigonometriche funzioni sempre più generali portava immediatamente con sè l'esigenza di estendere l'integrale a queste funzioni. I progressi che si verificarono durante l'Ottocento nella teoria dell'integrazione furono per la maggior parte legati allo studio delle serie di Fourier.

Lejeune-Dirichlet nell'ultima parte della sua memoria del 1829 sulle serie di Fourier, si pose il problema dell'integrabilità delle funzioni con un numero infinito di punti di discontinuità. Dopo aver dato una dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue, Dirichlet afferma che l'integrabilità di una funzione con infinite discontinuità dipende dalla topologia dell'insieme dei suoi punti di discontinuità. L'insieme delle discontinuità ammissibili deve esere tale che la sua chiusura non abbia punti interni. A sostegno della sua affermazione, che si rivelerà in seguito errata, portò il celebre esempio della funzione che porta il suo nome, cioè la funzione $f(x)$ che vale 1 se x è razionale e 0 se x è irrazionale, dicendo che si trattava di una funzione non integrabile.

Bernhard Riemann nella sua tesi di abilitazione alla libera docenza scritta nel 1854 diede una nuova definizione di integrale che si adatta a molte funzioni continue o discontinue anche in infiniti punti. Riemann introduce una generalizzazione delle somme di Cauchy prendendo in ogni intervallo il valore della funzione $f(x)$ non nel estremo, come aveva fatto Cauchy, ma in un punto qualsiasi dell'intervallo. Questa non sarebbe una grande innovazione; quello che è importante è il cambiamento del punto di vista. Mentra Cauchy si era limitato alle funzioni continue in modo da poter dimostrare la convergenza delle somme, Riemann prende questa convergenza come definizione dell'integrabilità di una funzione: la funzione $f(x)$, non importa se continua o meno, è integrabile se quando l'ampiezza degli intervalli della divisione tende a zero le somme di Cauchy hanno un limite finito.

In questo modo, il problema diventa non di dimostrare la convergenza delle somme sotto opportune ipotesi, ma di trovare delle condizioni che assicurino l'integrabilità di una funzione, in modo da caratterizzare le funzioni integrabili.

La pubblicazione della memoria di Riemann diede origine a una serie di studi che portarono a sviluppi in varie direzioni: da una parte la precisazione di concetti topologici e delle proprietà della retta, che condussero Cantor a fondare la teoria degli insiemi, dall'altra la costruzione di una teoria della misura che portò alla teoria di Lebesgue.

Lebesgue combina le idee di Peano e Jordan con quelle di Borel. Dato un insieme limitato E, egli ne definisce la misura esterna come avevano già fatto in precedenza Peano e Jordan, cioè come l'estremo inferiore delle misure dei pluri-intervalli che contengono E, ma a differenza di Peano e Jordan, per Lebesgue i pluri-intervalli sono costituiti non da un numero finito, ma da un'infinità numerabile di intervalli aperti. La loro misura è la somma delle misure dei singoli intervalli.

Una volta definita la misura esterna di un insieme, la misura interna sarà definita in termini della misura esterna del suo complementare. Un insieme sarà misurabile (secondo Lebesgue) se la sua misura interna e quella esterna coincidono.

La misura di Lebesgue rispetto a quella di Peano-Jordan ha il vantaggio di una maggiore duttilità e generalità. Il contributo più importante di Lebesgue è tuttavia l'applicazione di queste idee alla teoria dell'integrazione. Sulla differenza tra la sua definzione di integrale e quella di Riemann, Lebesgue stesso si sofferma nel suo articolo divulgativo (Sugli sviluppi della nozione di integrale). Riemann aveva approssimato dal basso e dall'alto le funzioni da integrare mediante delle funzioni a scala. Lebesgue fa lo stesso, ma le basi dei gradini della scala non sono intervalli come per Riemann, ma insiemi misurabili secondo la defizione che abbiamo visto nel secondo capitolo.

Uno dei risultati dell'introduzione della misura di Lebesgue è la soluzione del problema dell'integrabilità che aveva dato inizio allo studio della misura degli insiemi: una funzione f è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità (nel senso di Lebesgue), ha misura 0 (teorema di Vitali).

Con la teoria di Lebesgue però la misura non è più usata per caratterizzare le discontinuità delle funzioni integrabili secondo Riemann, ma per ampliare la classe delle funzioni integrabili. L'utilizzo di una misura numerabilmente additiva, oltre a rendere misurabili un gran numero di insiemi, porta con sè analoghe proprietà per l'integrale. Queso porta a godere di proprietà più efficienti come quelle del passaggio al limite sotto il segno di integrale, una delle pietre angolari della teoria e strumento molto potente in numerose applicazioni.

Capitolo 6

Bibliografia

1. E. Giusti - Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento. Edizioni Istituti editoriali e poligrafici internazionali. Pisa 2007

2. W. Rudin - Principles of mathematical analysis. Edizione McGraw-Hill. Singapore 1984

3. Jaures P. Cecconi, Guido Stampacchia - Analisi matematica. Edizione Liguori. Napoli 1979

4. Robert A. Adams - Calcolo differenziale 1. Casa Editrice Ambrosiana. British Columbia 1992

5. sito internet: www.matematicamente.it